

تمرین

- ۸. نشان دهید که در فضای متریک، هر گز که بازگشایی باز است.
- ۹. نشان دهید که برای مجموع مجموعه‌های باز، باز است، در استراک فضا هم مجموعه‌های باز، باز می‌باشد. در مورد استراک فضا هم مجموعه‌های باز چه؟ (در مورد مجموعه‌های بسته چه؟)
- ۱۰. فرض کنید فضاها $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ را داشته‌اند و

$$X = X_1 \times \dots \times X_k = \{ (x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in X_i \}$$

مردودیت $p \geq 1$ فرض است. تعرف کنیم

$$D_p((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \left[\sum_{i=1}^k (d_i(x_i, y_i))^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$D_\infty((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \max \{ d_i(x_i, y_i) \mid i=1, \dots, k \}$$

- الف) نشان دهید D_1 و D_∞ روی X متریک هستند.
- * ب) برای هر $p \geq 1$ نشان دهید D_p متریک است.
- پ) نشان دهید $\lim_{p \rightarrow \infty} D_p(x, y) = D_\infty(x, y)$

- ۱۱. فرض کنید d, d' دو متریک روی X باشند. d را با d' هم‌ارزی نامیده می‌گویند که $m > 0$ و $M > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم
- $$md(x, y) \leq d'(x, y) \leq Md(x, y)$$

- الف) نشان دهید اگر d, d' متریک هم‌ارز باشند، نگاه کنیم نسبت به آن یکی است: مجموعه باز، مجموعه بسته، دنباله همراهِ دنباله کوشی، تمام بودن فضا.
- ب) نشان دهید هر دو متریک هم‌ارز در سوال ۱۱ برای X هم‌ارز هستند.

۱۲. نشان دهید $R \times \dots \times R = R^n$ با متریک d متریک است.

۱۳. برای تابع $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ثابت کنید f در نقطه $a \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر

$$f(x) \rightarrow f(a) \text{ که } x \rightarrow a \text{ داشته باشیم}$$

۱۴. تابع $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ را می‌گویند f پیوسته در نقطه $x \in X$ اگر $f(x) \rightarrow f(a)$ باشد. نشان دهید شرط لازم برای پیوستگی f آن است که برای هر مجموعه باز U از Y مجموعه $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ در X باز باشد.

۱۵. تابع $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ را می‌گویند f پیوسته یکطرفه در $a \in X$ اگر $f(x) \rightarrow f(a)$ باشد. $\delta > 0$ که برای $\delta < \delta$ $d(x, y) < \delta$ $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ باشد. نشان دهید اگر f پیوسته یکطرفه باشد (پیوسته) دنباله کوشی در X آنگاه $(f(x_n))$ دنباله کوشی در Y است. بدون شرط یکطرفه چه؟