۳۴ـ (Ex 1.5) (a) چون E فشرده است اگر $x \notin E$: $d(x,E)>0$ بنابراین n ای وجود دارد

که $d(x,E)>\frac{1}{n}$ بنابراین $x \notin O_n$ و اگر $x \in E$ باشد x در همه‌ی O_n ها قرار خواهد داشت

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = E \Rightarrow O_n \searrow E$$

و از طرفی چون E فشرده است بازه‌ای متناهی مانند $[a,b]$ شامل E وجود دارد بنابراین برای هر n طبیعی

$O_n \subseteq [a-1,b+1]$ پس اندازه‌ی آنها هم متناهی است بنابراین طبق (Corollary 3.3 Page 20)

$$m(E)=\lim_{n\to\infty} m(O_n)$$

□

(b) مثال برای اشتراک بی‌کران که حکم درست نباشد $\mathbb{Z}$ است چون $m(\mathbb{Z})=0$ و هر O_n اندازه نامتناهی است.

و برای باز کران دار که حکم درست نباشد فرض کنید $r_1, r_2, r_3, \ldots$ شمارشی از اعداد گویای بازه‌ی $[0,1]$ باشد

و تعریف کنید: $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{1}{2^{n+3}}, r_n+\frac{1}{2^{n+3}}\right)$ در این صورت: $m(O)\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}<1$

در صورتی که O_n برای هر n شامل کل بازه‌ی $[0,1]$ خواهد بود.

۳۵ـ (Ex 1.11) تعریف کنید: $A_n := \{x\in[0,1]:$ رقم ۴ تا رقم n ام بعد از اعشارشان ندارند$\}$ در این صورت اندازه‌ی A_{n+1} دقیقاً

$\frac{9}{10}$ مجموعه‌ی A_n است و به علاوه $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ در نتیجه برای هر n ای: $m(A)\leq\left(\frac{9}{10}\right)^n$ پس $m(A)=0$.

۳۶ـ (Ex 1.15) برای هر پوشش مستطیلی $R_1, R_2, \ldots$ از E چون $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i$

$$\Rightarrow m_*(E)\leq m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}m_*(R_i)=\sum_{i=1}^{\infty}|R_i|\leq\inf\sum_{i=1}^{\infty}|R_i|=m_*^{R}(E)$$

از طرفی چون هر پوشش مکعبی خود پوششی مستطیلی است پس $\inf\sum_{i=1}^{\infty}|R_i|\leq\inf\sum_{i=1}^{\infty}|Q_i|$

چون $\inf$ روی مکعب‌ها روی خانواده‌ی کوچکتری محاسبه می‌شود $\Leftarrow m_*^{R}(E)\leq m_*(E) \Leftarrow m_*(E)=m_*^{R}(E)$

□

۳۷ـ (Ex 1.19) (a) بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید A باز باشد، اگر $x+y \in A+B$
در این صورت چون $r>0$ وجود دارد که $B_r(x) \subseteq A$ باشد که در این صورت $B_r(x)+\{y\}$ زیرمجموعه‌ای از
$A+B$ است ولی $B_r(x+y) = B_r(x)+\{y\}$ بنابراین $A+B$ نیز باز است.

(b) لم: اگر A فشرده باشد و B بسته باشد $\Leftarrow$ $A+B$ بسته است.

برهان: فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا به a در $A+B$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم a نیز در $A+B$
قرار دارد. چون a_n ها در $A+B$ قرار دارند همگی به صورت x_n+y_n هستند که $x_n \in A$ و $y_n \in B$. اکنون چون
A فشرده است، زیردنباله‌ای x_{n_k} از x_n ها هست که به عضوی از A مانند x همگرا باشد بنابراین چون
$x_{n_k} \to x$ و $a_{n_k} \to a$ در این صورت $y_{n_k} = a_{n_k} - x_{n_k} \to a-x$ و چون y_{n_k} دنباله‌ای همگرا در B
است و B بسته است نتیجه می‌شود $a-x$ هم در B است: $\left.\begin{array}{l} a-x \in B \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow a \in A+B$

□

اثبات قسمت (b): تعریف کنید: $A_n = A \cap \overline{B_n(0)}$ در این صورت A_n ها فشرده‌اند و طبق لم
A_n+B ها بسته هستند بنابراین: $A+B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n+B)$

مجموعه‌ای F_σ است بنابراین اندازه‌پذیر است.

(c) تعریف کنید $A_n = \{n+\frac{n}{m} : m>n\}$ در این صورت $A_n \subseteq [n,n+1)$ و تعریف کنید $A'_n = A_n \cup \{n\}$
در این صورت A_n ها بسته هستند و همین طور $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ بسته است چرا که اگر a_n دنباله‌ای همگرا در A باشد
اگر به عددی طبیعی همگرا باشد که آن عدد در A است در غیر این صورت از جایی به بعد در $(n,n+1)$ قرار دارد بنابراین
همه‌ی اعضایش در A_n است و چون A_n بسته است به عضوی از خود آن همگراست. اگر $B=\mathbb{Z}$ باشد مجموعه‌ی
$A+B$ برابر $\mathbb{Q}$ خواهد بود که به وضوح بسته نیست.

□

۳۸ـ (Ex 1.26) چون $E-A \subseteq B-A$ و $m(B-A)=0 \Leftarrow m(A)=m(B)=m(A)+m(B-A)$

و $m_*(E-A)=0$ بنابراین $E-A$ اندازه پذیر است پس $E=(E-A)\cup A$ نیز اندازه پذیر است.

۳۹ـ (Ex 1.16) Borel_Cantelli : ابتدا ثابت می‌کنیم $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n} E_k$

اگر $x\in E$ باشد برای هر n طبیعی $k\ge n$ وجود دارد که $x\in E_k$ باشد بنابراین برای هر n طبیعی

$x\in \bigcup_{k\ge n} E_k$ پس $E\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge n} E_k \Leftarrow x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n\le k} E_k$. برعکس اگر $x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge n} E_k$

باشد چون برای هر n ای عضو $\bigcup_{k\ge n} E_k$ هست برای نامتناهی اندیس عضو E_k خواهد بود پس $x\in E$ □

حال تعریف کنید $F_k := \bigcup_{j\ge k} E_j$ در این صورت $E=\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ پس $F_k \searrow E$ و چون

$m(F_k)\le \sum_{j\ge k} m(E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) <\infty$ پس F_k ها در شرایط (Corollary 3.3 Page 20)

صدق می‌کنند بنابراین $m(E)=\lim_{k\to\infty} m(F_k)$ ولی چون $m(F_k)\le \sum_{j\ge k} m(E_j)$ و سری $\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

همگراست پس دم سری به صفر میل می‌کند پس $m(E)=0$. □