

تمرین

۱۶. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک گسسته است. نشان دهید متریک  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  متریک است  $(\mathbb{R}^n, d)$  متریک (مکرر). کدام تابع‌ها  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$  متریک است؟

۱۷. در فضای متریک  $(X, d)$  دنباله  $(x_n)$  در نظر بگیرید،  $n=1, 2, 3, \dots$ .  
 (الف) فرض کنید  $n$  را به  $n$  دائم  $\frac{1}{n} < d(x_n, x_{n+1})$  آیا  $(x_n)$  لزوماً یک دنباله کوشش است؟  
 (ب) فرض کنید  $n$  را به  $n$  دائم  $2^{-n} < d(x_n, x_{n+1})$  آیا  $(x_n)$  لزوماً کوشش است؟

۱۸. فضای متریک  $(X, d)$  داده شده است. فرض کنید عدد  $k$  وجود دارد  $0 < k < 1$  که  $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$  برای هر  $x, y$  در  $X$ .  
 (الف) برای نقطه  $x_0$  در  $X$  تعریف کنید

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$$

نشان دهید  $(x_n)$  یک دنباله کوشش است.

(ب) چون فضای  $(X, d)$  گسسته است، دنباله بالا باید به نقطه‌ای  $x^*$  ملگم کند. نشان دهید  $f(x^*) = x^*$  و نقطه  $x^*$  نقطه  $X$  دارای این ویژگی است  $(f(x) = x)$  هیچ دیگری  $x$  بر نقطه‌ای که باشد دنباله  $(x_n)$  به  $x^*$  ملگم کند.

۱۹. در این مثال‌ها از سلبیات ریاضی عمومی خود استفاده کنید. در این قسمت ویژگی‌های ما را ثابت کنید. در زیر دنباله تابعی داده شده است. تحت نشان دهید هر دو تابع ما در  $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  هستن. سپس نشان دهید دنباله  $(f_n)$  تابعی متریک است. در زیر یک از سربدری‌ها را که هر دو برای تکلیف است بایستید. مشکل بکشید.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \geq \frac{1}{n} \text{ یا } x \leq 0 \\ nx & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1-nx & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$n=1, 2, 3, \dots$   
 (۲۰)  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  دنباله  $f_n(x) = x^n$ ، مستقیماً (بدون استفاده از ویژگی‌های سری)، ثابت کنید هر دو برای تکلیف است.

(۲۱) (الف) فرض کنید  $(x_n)$  در بازه بسته  $[a, b]$  متراکم دنباله  $(x_n)$  در  $[a, b]$  هرگز نیست.

(ب) فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای نامتناهی از  $[a, b]$  است. نشان دهید  $S$  دارای یک نقطه حدهی چون  $c$  در  $[a, b]$  است، پس نقطه‌ای  $c$  مالین ویژگی در  $[a, b]$  وجود دارد که برای  $\epsilon > 0$  نقطه‌ای  $s \in S$  هست که  $s \neq c$  و  $|s - c| < \epsilon$ .