تمرین

۲۲. فرض کنید (C_n) یک دنباله از زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbb{R}^k$ باشد که $\cdots \subset C_3 \subset C_2 \subset C_1$.
آیا $\bigcap C_n$ لزوماً ناتهی است؟ اگر C_nها هم فشرده باشند چه؟

۲۳. فرض کنید (x_n) یک دنبالهٔ همگرا در $\mathbb{R}^k$ است، $x_n \to x^*$. نشان دهید مجموعهٔ
$C = \{x_n \mid n=1,2,\dots\} \cup \{x^*\}$ فشرده است.

۲۴. S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^k$ است و S' مجموعهٔ نقاط حدی S.

(الف) نشان دهید $S \cup S'$ بسته است.

(ب) اگر S کراندار باشد، نشان دهید $S \cup S'$ فشرده است.

۲۵. فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbb{R}^m$ است و $f: K \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته.
ثابت کنید f دارای نقاط ماکسیمم و مینیمم در K است، یعنی نقاط $\bar{x} \in K$ و $\underline{x}$ وجود دارند که برای هر $x \in K$ داریم $f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\bar{x})$.

۲۶. (X,d) یک فضای متریک است، و S زیرمجموعه‌ای از X. تعریف می‌کنیم:

$$D_S : X \to \mathbb{R}, \quad D_S(x) = \inf\{d(x,s) \mid s \in S\}$$

(الف) نشان دهید D_S تابعی پیوسته است (راهنمایی: ثابت کنید $|D_S(x_1) - D_S(x_2)| \le d(x_1,x_2)$)

(ب) فرض کنید S بسته است. نشان دهید $D_S(x)=0$ اگر و فقط اگر $x \in S$.

۲۷. (دنباله ۲۶) فرض کنید C یک مجموعهٔ بسته و K یک مجموعهٔ فشرده در $\mathbb{R}^k$ هستند که
اشتراک آنها تهی است، $C \cap K = \emptyset$. تعریف می‌کنیم:

$$\delta(C,K) = \inf\{d(c,k) \mid c\in C,\ k \in K\}$$

(الف) نشان دهید $\delta(C,K)$ اکیداً مثبت است.

(ب) اگر C و K فقط هر دو بسته باشند و $\delta(C,K)$ را چون بالا تعریف کنیم، آیا ممکن است $\delta(C,K)$ صفر شود (البته همچنان فرض می‌کنیم $C \cap K = \emptyset$).