تمرین

۱. k و n اعداد صحیح مثبت هستند. نشان دهید اگر $\sqrt[k]{n}$ گویا باشد، لزوماً یک عدد صحیح است، یعنی n باید یک توان k-ام کامل باشد.

۲. از اصل تمامیت اصل ارشمیدس به صورت زیر را نتیجه بگیرید: برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح N وجود دارد که $N > x$.

۳. از این فرض که هر بسط اعشاری $a_0.a_1a_2a_3\ldots$ یک عدد حقیقی است و اصل ارشمیدس، اصل تمامیت را نتیجه بگیرید.

۴. فرض کنید زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ دارای کران بالایی است. نشان دهید $a = \sup S$ اگر و فقط اگر a کران بالا باشد و برای هر $\varepsilon > 0$، وجود داشته باشد $s \in S$ که $s + \varepsilon > a$.

۵. (a_n) یک دنباله از اعداد حقیقی است. ثابت کنید:

الف) $\underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n$

ب) دنباله (a_n) همگراست اگر و فقط اگر $\underline{\lim} = \overline{\lim}$ (حالت $\pm\infty$ را در نظر بگیرید)

۶. S را مجموعه $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$ از اعداد صحیح در نظر بگیرید. فرض کنید تابع $\sigma : S \to S$ غیرنزولی است، یعنی $\sigma(m) \le \sigma(n)$ اگر و فقط اگر $m \le n$. در این صورت اگر (a_n) یک دنباله باشد ($n \ge k$)، دنباله $(a_{\sigma(n)})$ را یک زیردنباله (a_n) می‌نامیم. فرض کنید T مجموعه حدهای زیردنباله‌های (a_n) باشد. نشان دهید:

$$\overline{\lim}\, a_n = \sup T, \quad \underline{\lim}\, a_n = \inf T$$

۷. فرض کنید (a_n) یک دنباله کراندار از اعداد حقیقی است. ثابت کنید:

$$\overline{\lim}(a_n+b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n, \quad \underline{\lim}(a_n+b_n) \ge \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$$

فرض کنید دنباله (b_n) همگرا باشد و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. در این صورت ثابت کنید

$$\overline{\lim}(a_n+b_n) = \overline{\lim}\, a_n + b, \quad \underline{\lim}(a_n+b_n) = \underline{\lim}\, a_n + b$$